Lagrange乘子集合的有界性

鄂 宁 姚光明

(哈尔滨师范大学)

【摘要】 研究在 Robinson条件下多目标规划问题的 Lagrange乘子集合的有界性,以及局部一致有界性.

关键词: 多目标规划; Lagrange乘子; KKT条件; Robinson条件

0 引言

设 X、Y、Z是 Banach空间, $f: X \to Y$, $G: X \to Z$是连续可微的映射, $K \subset Z$是闭凸子集, $D \subset Y$是内点非空的闭凸锥. 考虑下面的抽象多目标最优化问题

$$\text{(MOP)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } G(x) \in K, \end{aligned}$$

当 $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p, Z = \mathbb{R}^m, K = \mathbb{R}^s_- \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ 时,上述问题即简化为通常的带有不等式和等式约束的多目标规划问题. 对于单目标规划来说 Mangasarian Fromovitz条件是 Lagrange乘子集合有界的充分条件. 笔者主要研究具有抽象约束的多目标规划问题 (MOP) 的 Lagrange乘子集合有界性的充分条件,证明了 Robinson条件蕴涵 Lagrange乘子集合的有界性. 而对于带有等式和不等式约束的多目标规划问题来说,MF条件等价于 Robinson条件.

1 Lagrange乘子集合的有界性

定义 1 设 C是 X中的非空子集, $x \in C$. 我们称集合

$$T_C(x) = \{ v: \lim_{t \downarrow 0} \inf \frac{d(x + tv, C)}{t} = 0 \} \qquad (1)$$

为集合 C在 x点的切锥.

切锥也可写为

$$T_C(x) = \{ v \in X: \exists\, t_n \downarrow 0, \text{ s.t. } d(x + t_n v, C) = o(t_n) \}$$

定义 2 设 C是 X中的非空凸集, $x \in C$,我们称集合

$$N_C(x) = \{ x^* \in X^*: \langle x^*, y - x \rangle \le 0, \ \forall y \in C \} \qquad (2)$$

为集合 C在 x点的法锥.

我们接下来给出多目标规划问题 (MOP) 的一些基本概念.

定义 3[3] 设 $x_0 \in X$, $G(x_0) \in K$ 如果

$$0 \in \operatorname{int}\{ G(x_0) + DG(x_0)X - K \} \qquad (3)$$

我们说问题 (MOP) 在 x_0点满足 Robinson条件.

注记 3.1[3] 如果问题 (MOP) 在 x_0点满足 Robinson条件,则

$$DG(x_0)X - T_K(G(x_0)) = Z. \qquad (4)$$

$$(DG(x_0)X)^{\perp} \cap N_K(G(x_0)) = \{0\}. \qquad (5)$$

如果存在 $(x, \lambda, u) \in X \times D^+ \setminus \{0\} \times Z^*$,使得

$$\begin{aligned} &(Df(x_0))^* (\lambda) + (DG(x_0))^* (u) = 0, \\ &u \in N_K(G(x_0)), \\ &\|\lambda\| = 1 \end{aligned} \qquad (6)$$

我们称 x为问题 (MOP) 的一个 KKT点.

收稿日期: 2008 - 05 - 10

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定义 4[2] 给定多目标优化问题 (MOP),设 $x_0 \in \Phi$. 我们称集合

$$\Lambda(x_0) = \{(\lambda, u) \in D^+ \setminus \{0\} \times Z^* : (x_0, \lambda, u) \text{ 是系统 } (6) \text{ 的解}\}$$

为多目标优化问题 (MOP) 在点 x_0 的 Lagrange乘子集,在这里 $D^+ = \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y \rangle \geq 0, \forall y \in D\}$.

我们下面给出多目标优化问题 Lagrange乘子集合局部一致有界的结论.

定理 5 假设 Y和 Z都是有限维的 Banach空间. 考虑多目标优化问题 (MOP), f和 G是连续可微的. 设 $x_0 \in \Phi$ 是 (MOP) 的 KKT点,且满足 Robinson条件. 考虑点列 $\{x_n\}$,使得 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$,且 x_n 也是 (MOP) 的 KKT点. 令 $\Lambda(x_n)$ 表示 (MOP) 在 x_n 点的 Lagrange乘子. 则对充分大的 n, $\Lambda(x_n)$ 是一致有界的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 (MOP) 的 KKT点列, $x_n \to x_0$. 如果存在 $(\lambda_n, u_n) \in \Lambda(x_n)$ $(\forall k)$,使得

$$\lim_{n\to\infty} \|(\lambda_n, u_n)\| = \infty.$$

那么由 $\Lambda(x_n)$ 的定义,我们有

$$(Df(x_n))^*(\lambda_n) + (DG(x_n))^*(u_n) = 0 \tag{7}$$

$$u_n \in N_K(G(x_n)) \tag{8}$$

$$\|\lambda_n\| = 1 \tag{9}$$

不失一般性,设 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$,其中 $\|\lambda\| = 1$. 因此 $\lim_{n\to\infty}\|u_n\| = \infty$. 因为有限维空间中的闭单位球是紧的,我们不妨设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\|u_n\|} = u. \tag{10}$$

显然, $\|u\| = 1$. 等式 (7) 两端同时除以 $\|u_n\|$,令 $n \to \infty$,

$$(DG(x_0))^*(u) = 0 \tag{11}$$

因为 $N_K(G(x_n))$ 是闭凸锥,所以对任意的 n有

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} \in N_K(G(x_n)) \tag{12}$$

令 $n \to \infty$,由 $N_K(\cdot)$ 的闭性知

$$u \in N_K(G(x_0)) \tag{13}$$

所以

$$u \in (DG(x_0)X)^{\perp} \cap N_K(G(x_0)) \tag{14}$$

根据 Robinson条件和 (5) 知 $u = 0$,而这与 $\|u\| = 1$矛盾.

注:取 $x_n = x_0$, $\forall n \in \mathbf{N}$,则该定理就退回到 Lagrange乘子集合 $\Lambda(x_0)$ 的有界性.

参 考 文 献

[1] Yu, P. , L. Multiple - criteria Decision Macing: Concepts, Techniques and Extensions. Plenum Press, New York, 1983.

[2] 林锉云,董加礼. 多目标优化的方法和理论. 长春:吉林教育出版社, 1992.

[3] J. F. Bonnans and A. Shapiro. Perturbation Analysis of Optimization Problems. Springer Series in Operations Research. , Springer - Verlag, New York, 2000.

THE BOUNDEDNESS OF THE LAGRANGE MULTIPLIER SET

E Ning Yao Guangming

(Harbin Normal University)

ABSTRACT

In this paper, we present the boundedness and locally uniformly boundedness of the Lagrange multiplier Set for multiobjective program in the case of the Robinso 's constraint qualification.

Keywords: Multiobjective program; Lagrange Multiplier; KKT condition; Robinson 's condition

(责任编辑:李双臻)

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net