多目标规划问题的同伦方法

姚光明， 宋 文
（哈尔滨师范大学 数学系，黑龙江 哈尔滨 150080）

摘 要：考虑多目标规划问题的组合同伦内点法，构造了一个新的组合同伦映射，在某些基本条件下证明了由该映射可以得到一个有界光滑同伦路径. 数值追踪这条路径，可以得到多目标规划问题（MOP）的 K－K－T 点及相应的 Lagrange 乘子.

关键词：多目标规划；同伦方法；K－K－T 条件
中图分类号：O221.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001－7011(2007)02－0253－04

1 引 言

考虑多目标规划问题：

$$(\mathrm{MOP})\qquad \begin{aligned} &\min f(x)\\ &s.t.\ \ g(x)\leqslant 0,\\ &x\in R^n, \end{aligned}$$

其中$f=(f_1,f_2,\cdots,f_p)^{\mathrm T}$，$g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)^{\mathrm T}$，$f_i(i=1,\cdots,p)$，$g_j(j=1,\cdots,m)$是$R^n$上的二次连续可微的函数. $\Omega:=\{x\in R^n:g(x)<0\}$表示（MOP）的严格可行集，$\bar\Omega:=\{x\in R^n:g(x)\leqslant 0\}$表示（MOP）的可行集. 记$R^p_+=\{x\in R^p:x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,p\}$，$R^p_{++}=\{x\in R^p:x_i>0,i=1,2,\cdots,p\}$，$\Lambda^{++}=\{\lambda\in R^p_{++}:\sum_{i=1}^p\lambda_i=1\}$，$I:=\{1,2,\cdots,m\}$ $I(x):=\{j\in I:g_j(x)=0\}$表示$\bar\Omega$在$x$点的作用指标集.

定义1 设$x\in\bar\Omega$，如果不存在$y\in\bar\Omega$，使得

$f(y)\leqslant f(x)$， 且 $f(y)\neq f(x)$，

则称点x为（MOP）的一个有效解.

定义2 设$x\in\bar\Omega$. 如果存在非零向量$p\in R^n$，使得

$$\nabla g_i(x)p>0,\qquad i\in I(x),$$

则称多目标规划问题（MOP）在x点满足 Mangasarian－Fromovitz 约束品性，简称 MF 约束品性.

众所周知，如果x是（MOP）的一个有效解，则在某些约束品性条件下，如 K－T 约束规格[1]，MF 约束品性或 Abadie 约束品性[2]，（MOP）在x点满足 K－K－T 条件：

$$\nabla f(x)^{\mathrm T}\lambda+\nabla g(x)^{\mathrm T}u=0,$$
$$U\times g(x)=0,$$

其中$x\in\bar\Omega$，$\lambda\in R^p_+\setminus\{0\}$，$u\in R^m_+$，$U=\mathrm{diag}\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$\nabla f(x)\in R^{p\times n}$，$\nabla g(x)\in R^{m\times n}$分别表示$f$和$g$在点$x$的 Jacobian 矩阵. 把满足 K－K－T 条件的点x称为（MOP）的 K－K－T 点，相应的(λ,u)称为（MOP）在点x的 Lagrange 乘子. 因为$\lambda\neq 0$，不妨设$\sum_{i=1}^p\lambda_i=1$ 因此问题就是寻求$\omega=(x,\lambda,u)\in\bar\Omega\times R^{p+m}_+$，使得

$$\nabla f(x)^{\mathrm T}\lambda+\nabla g(x)^{\mathrm T}u=0,$$
$$U\times g(x)=0,$$

收稿日期：2006－03－15
基金项目：黑龙江省自然科学基金资助项目（A200607）；黑龙江省研究生创新科研资金资助项目（YJSCX2005－39HLJ）
作者简介：姚光明（1981－），男，硕士研究生，主要研究方向：非线性分析，E－mail：gmyao827@yahoo.com.cn
通讯作者：宋 文（1964－），男，教授，博士，博士生导师

$$1-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=0 \tag{1}$$

多目标优化问题的 K-K-T 条件是优化理论中一个重要的研究方向,因而寻求 K-K-T 点的方法在优化理论中也有着举足轻重的地位. 1981 年,Garcia,Zhangwill[3] 首先利用了同伦方法研究凸规划问题,后来,林正华等人介绍了一种新的组合同伦内点(CHIP)法求解凸非线性规划问题的 K-K-T 点[4]. 最近,林正华及其合作者将 CHIP 法推广至凸多目标规划问题上[5],在 Slater 条件及边界正则性条件下得到相应的纯量化问题 K-K-T 系统解存在的构造性证明. 相对其他约束品性,边界正则性条件是相对较强的. 本文构造了一个新的组合同伦映射,用法锥条件代替问题的凸性,在较弱的 MF 约束品性条件下证明了由该同伦映射可以得到一个有界光滑同伦路径,数值追踪这条路径,可以得到多目标规划问题(MOP)的 K-K-T 点及相应的 Lagrange 乘子,推广了文[5]的结果.

在第 2 节给出几个基本定义和引理,并重新构造了一个组合同伦映射. 第 3 节证明了由该同伦映射可以得到一个有界光滑同伦路径,这是本文的主要结果.

2　基本定义及引理

首先介绍"同伦映射". 这是拓扑学中最基本的概念之一.

定义 2.1　设 X 和 Y 是拓扑空间,$h_i:X\to Y$ 是连续映射$(i=0,1)$,$I=[0,1]$是实数空间. 如果存在连续映射 $H:X\times I\to Y$,使得

$$H(x,0)=h_0(x),\ \forall x\in X;\quad H(x,1)=h_1(x),\ \forall x\in X;$$

则称 H 是从 h_0 到 h_1 的一个同伦映射.

为了求解(1),构造同伦映射 H 如下:

$$H(\omega,\omega^0,\mu)=\begin{bmatrix}(1-\mu)(\nabla f(x)^{\mathrm T}\lambda+\nabla g(x)^{\mathrm T}u)+\mu(x-x^0)\\ U\times g(x)-\mu U^0\times g(x^0)\\ (1-\mu)(1-\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i)e-\mu(\lambda-\lambda^0)\end{bmatrix}=0, \tag{2}$$

这里 $\omega^0=(x^0,\lambda^0,u^0)\in\Omega\times\Lambda^{++}\times R^m_{++}$,$e=(1,1,\cdots,1)\in R^p$,$\omega=(x,\lambda,u)\in\bar{\Omega}\times R^p_{++}\times R^m$,$\mu\in[0,1]$.

当 $\mu=1$ 时,同伦方程变为

$$x-x^0=0,$$
$$U\times g(x)-U^0\times g(x^0)=0,$$
$$\lambda-\lambda^0=0.$$

注意到 $x^0\in\Omega$,有 $\omega=\omega^0$. 即关于 ω 的方程 $H(\omega,\ \omega^0,\ 1)=0$ 有唯一解 $\omega=\omega^0$.

当 $\mu=0$ 时,(2)的解恰为 K-K-T 系统(1)的一个解.

文献[5]中构造了(MOP)的纯量化问题的 KKT 系统与一个平凡映射之间的同伦. 通过上面的分析发现,同伦映射 H 直接建立了问题(MOP)的 KKT 系统与一个平凡映射之间的同伦,从而改进了文[5]的结果. 对于一个给定的 ω^0,记 $H(\omega,\omega^0,\mu)$ 为 $H_{\omega^0}(\omega,\mu)$. 映射 H_{ω^0} 的零点集记为 $H_{\omega^0}^{-1}(0)=\{(\omega,\mu)\in\Omega\times R^{p+m}_{++}\times(0,1]:H(\omega,\omega^0,\mu)=0\}$. 由于 $H(\omega^0,\omega^0,1)=0$,$H_{\omega^0}^{-1}(0)\neq\emptyset$.

引入微分拓扑中的几个概念和引理来讨论 $\mu\in(0,1]$ 时同伦等式的性质. 微分流形的定义详见[6]. 显然 Ω 是一个 n 维微分流形.

定义 2.2　令 M,N 是微分流形,$\dim N=p$,$H:M\to N$ 是一个可微映射. 如果

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right]=p,\qquad \forall x\in H^{-1}(y),$$

则称 $y\in N$ 为映射 H 的正则值,$x\in M$ 称为正则点.

引理 2.1[6]　设 Λ,M,及 N 分别为 q 维,m 维及 p 维微分流形,其中只有 M 是带边的,$F:\Lambda\times M\to N$ 是 C^r 映射,其中 $r>\max\{0,m-p\}$. 如果 $0\in N$ 是 F 及 ∂F 的正则值,则对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$,0 是 $F_\lambda=F(\lambda,\cdot)$ 及 ∂F_λ 的正则值,其中 ∂F,∂F_λ 分别表示为 F 在 $\Lambda\times\partial M$ 及 F_λ 在 ∂M 上的限制.

引理 2.2[6]　设 M 是 m 维带边 C^r 微分流形,N 是 p 维无边 C^r 微分流形,$r\geqslant1$,$F:M\to N$ 是一个 C^r 映射. 如果 $q\in N$ 是 F 及 ∂F 共同的正则值,并且 $F^{-1}(q)\neq\emptyset$,那么 $S=F^{-1}(q)$ 是一个 $m-p$ 维子流形,并且

$$\partial S = S \cap \partial M.$$

引理 2.3[7] 一维带边微分流形的每个连通分支或者微分同胚于单位圆周，或者微分同胚于单位区间.

本文中，使用以下几个基本条件：

(A) Ω 非空(Slater 条件)，且为有界连通集合；

(B) $\forall x \in \partial\Omega$, MF 约束品性成立；

(C) $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\{x + \sum\limits_{i \in I(x)} u_i g_i(x)^{\mathrm{T}} : u_i \geqslant 0\} \cap \Omega = \{x\}$.

显然，文献 11 中的"边界正则性条件"，即

$$\forall x \in \partial\Omega, \nabla g_i(x)\,(i \in I(x))\text{ 是线性无关的}$$

蕴含 MF 约束品性. 可以证明，如果条件(B)成立，那么$\partial\Omega = \{x \in \bar{\Omega}: \exists j \in I, s.t.\ g_j(x) = 0\}$. 实际上，法锥条件($C$)是集合凸性的自然推广，即如果 $\bar{\Omega}$ 是凸集，则 $\bar{\Omega}$ 一定满足法锥条件. 因此对凸多目标规划问题，条件(C)自然成立.

3 基本结论

定理 3.1 设f_i, g_j 是二次连续可微的函数. 如果条件(A)成立，则对几乎所有的初始点 $\omega^0 \in \Omega \times \Lambda^{++} \times R^m_{++}$，0 是 H_{ω^0}的正则值，并且 $H^{-1}_{\omega^0}(0)$ 由一些光滑曲线组成，其中有一条从$(\omega^0, 1)$出发，记作 Γ_{ω^0}.

证明 对$\forall(\omega, \omega^0, \mu) \in H^{-1}(0)$,

$$\frac{\partial H(\omega, \omega^0, \mu)}{\partial(x^0, \lambda^0, u^0)} = \begin{bmatrix} -\mu I & 0 & 0 \\ -\mu U^0 \times \nabla g(x^0) & 0 & -\mu \mathrm{diag}(g(x^0)) \\ 0 & \mu I & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $x^0 \in \Omega$ 且 $\mu \in (0,1]$，知道 $\mathrm{rank}\left[\frac{\partial H(\omega, \omega^0, \mu)}{\partial(x^0, \lambda^0, u^0)}\right] = n + p + m$. 因此雅可比矩阵$\frac{\partial H(\omega, \omega^0, \mu)}{\partial(\omega, \omega^0, \mu)}$及$\frac{\partial H(\omega, \omega^0, 1)}{\partial(\omega, \omega^0)}$都是行满秩的，即 0 是 H 及其边界映射∂H 的正则值. 由引理 2.1，对几乎所有的 $\omega^0 \in \Omega \times \Lambda^{++} \times R^m_{++}$，0 是 H_{ω^0}和∂H_{ω^0}的正则值. 再由引理 2.2 及引理 2.3，$H^{-1}_{\omega^0}(0)$ 由一些光滑曲线组成. 因为 $H(\omega^0, \omega^0, 1) = 0$，其中必有一条从$(\omega^0, 1)$出发，记作 Γ_{ω^0}.

定理 3.2 设f_i, g_j 是二次连续可微的函数，条件(A)成立. 对给定的 $\omega^0 \in \Omega \times \Lambda^{++} \times R^m_{++}$，如果 0 是 H_{ω^0} 的正则值，则 Γ_{ω^0}的 λ - 分量有界.

证明 假设 Γ_{ω^0}的 λ - 分量无界. 因为$(0,1]$是有界的，故一定存在一个序列$\{(\omega^k, \mu_k)\} \subset \Gamma_{\omega^0}$，使得，

$$\mu_k \to \mu_*,\ \text{且}\ \|\lambda^k\| \to +\infty,\ (k \to \infty).$$

由同伦等式(2)，有

$$(1 - \mu_k)(1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k)e - \mu_k(\lambda^k - \lambda^0) = 0,$$

即

$$[1 - \mu_k, 1 - \mu_k, \cdots, 1 - \mu_k]^{\mathrm{T}} - [\lambda_1^k + (1 - \mu_k)\sum_{i=2}^{p} \lambda_i^k, \lambda_2^k + (1 - \mu_k)\sum_{i \neq 2} \lambda_i{}^k, \cdots, \lambda_p{}^k + (1 - \mu_k)\sum_{i \neq p} \lambda_i{}^k]^{\mathrm{T}} + \mu_k[\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_p^0]^{\mathrm{T}} = 0.$$

令 $I_1 = \{j \in \{1, 2, \cdots, p\} : \lim\limits_{k \to \infty} \lambda_j^k = \infty\}$，则由假设，$I_1 \neq \emptyset$. 根据 $\mu_k \to \mu_* \in [0,1]$及 $\lambda^k \geqslant 0$，令 $k \to \infty$，上方程组至少有一个等式中，等号左端第二项趋于无穷，而其余两项均有界，这是一个矛盾. 因此 G_{ω_0}的 λ - 分量是有界的. Γ_{ω^0}的 λ - 分量是有界的.

定理 3.3(有界性) 设f_i, g_j 是二次连续可微的函数，条件 (A)，(B)及(C) 成立. 对给定的 $\omega^0 \in \Omega \times \Lambda^{++} \times R^m_{++}$，如果 0 是 H_{ω^0}的正则值，则 Γ_{ω^0}有界.

证明 仍然使用反证法. 假设 Γ_{ω^0}无界，由定理 3.2，$\exists\{(\omega^k, \mu_k)\} \subset \Gamma_{\omega^0}$，使得，

$$x^k \to x^*,\quad \mu_k \to \mu_*,\quad \lambda^k \to \lambda^*,\quad \text{且}\ \|u^k\| \to \infty,\quad (k \to \infty),$$

其中 $x^* \in \bar{\Omega}$, $\mu_* \in [0,1]$, $\lambda^* \geqslant 0$. 因为 R^n 中的闭单位球是紧的，不妨设$\lim\limits_{k \to \infty} \frac{u^k}{\|u^k\|} = u^*$，显然，$u^* \geqslant 0$,

$\| u^* \| = 1$. 由同伦等式(2),有

$$(1-\mu_k)(\nabla f(x^k)^{\mathrm{T}}\lambda^k + \nabla g(x^k)^{\mathrm{T}}u^k) + \mu_k(x^k - x^0) = 0, \tag{3}$$

$$U^k \times g(x^k) - \mu_k U^0 \times g(x^0) = 0. \tag{4}$$

令 $I_1(x^*) = \{j \in I: \lim_{k\to\infty} u_j^k = \infty\}$. 根据(4),有 $\emptyset \neq I_1(x^*) \subset I(x^*)$,即 $x^* \in \partial\Omega$.

(i) 当 $\mu_* \in [0,1)$ 时,将(3)改写为

$$(1-\mu_k)(\nabla f(x^k)^{\mathrm{T}}\lambda^k + \sum_{j \notin I(x^*)} u_j^k \nabla g_j(x^k)^{\mathrm{T}} + \sum_{j \notin I(x^*)} u_j^k g_j(x^k)^{\mathrm{T}}] + u_k(x^k - x^0) = 0,$$

上式两端同时除以 $\| u^k \|$,令 $k \to \infty$,

$$\nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}}((1-\mu_*)u_I^*) = 0, \tag{5}$$

其中 $\nabla g_I(x^*)$ 表示 $\nabla g(x^*)$ 的 x^* 作用约束部分,$u_I^* = \{(u_i^*: i \in I(x^*))\}$. 因为 $I_1(x^*) \subset I(x^*)$, $\| u_I^* \| = \| u^* \| = 1$. 而 $\mu_* \in [0,1)$,从而 $(1-\mu_*)u_I^* \geqslant 0$,且 $\| 1-\mu_*)u_I^* \| > 0$. 由 MF 约束品性,存在非零向量 $p \in R^n$,使得

$$\nabla g_I(x^*)p > 0,$$

即 $p^{\mathrm{T}} \nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}} > 0$. 然而,由(5)式,

$$p^{\mathrm{T}} \nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}}((1-\mu_*)u_I^*) = 0,$$

故 $(1-\mu_*)u_I^* = 0$,这是矛盾.

(ii) 当 $\mu_* = 1$ 时,根据(4),$I_1(x^*) = I(x^*)$. 从而 $u_I^k > 0$,且 $\| u_I^k \| \to \infty \ (k \to \infty)$,其中 $u_I^k = \{(u_i^k: i \in I(x^*))\}$. 因为方程 $H(\omega, \omega^0, 1) = 0$ 有唯一解 $\omega = \omega^0$,不妨设 $\mu_k \neq 1$. (3) 式两端同时除以 $(1-\mu_k) \| u_I^k \|$,令 $k \to \infty$,设 $\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_I^k}{\| u_I^k \|} = u$,

$$\nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}} u + \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k(x^k - x^0)}{(1-u_k) \| u_I^k \|} = 0, \tag{6}$$

注意到 $\mu \geqslant 0$,且 $\| u \| = 1$,因为 $x^k - x^0 \to x^* - x^0 \neq 0 (k \to \infty)$,即 $\exists j_0 \in \{1, \cdots n\}$,使得 $(x_{j_0}^* - x_{j_0}^0) \neq 0$,从而 $\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{(1-\mu_k) \| u_I^k \|} = 0$,存在,不妨设为 μ,当 $\mu > 0$ 时,(6)可以变形为 $x^* + \nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}} \frac{u}{\mu} = x^0$,这与条件($C$)是矛盾的. 当 $\mu = 0$ 时,(6)简化为 $\nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}} u = 0$. 由 MF 约束品性,存在非零向量 $p \in R^n$,使得

$$\nabla g_I(x^*)p > 0, \text{且} p^{\mathrm{T}} \nabla g_I(x^*)^{\mathrm{T}} u = 0.$$

故 $u = 0$,这与 $\| u \| = 1$ 矛盾.

从而 Γ_{ω^0} 是一条有界曲线.

由定理 3.3 知,对几乎所有的 $\omega^0 \in \Omega \times \Lambda^{++} \times R_{++}^m$,同伦方程(2)能够确定一条从 $(\omega^0, 1)$ 出发的有界光滑曲线 Γ_{ω^0},此曲线即所谓的同伦路径. 追踪此曲线直到 $\mu = 0$,可以得到(MOP)的 K-K-T 点及相应的 Lagrange 乘子. 将另文报告方法的收敛性结果.

参考文献

[1] 林锉云,董加礼. 多目标优化的方法和理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992.

[2] MAEDA T. Second-order conditions for efficiency in nonsmooth multiobjective optimization problems[J]. J Optimization Theory and Applications, 2004, 122(3): 521-538.

[3] GARCIA C B, ZANGWILL W I. Pathways to solutions, fixed points and equilibria[M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1981. 475-495.

[4] LIN Z H, LI Y, YU B. A combined homotopy interior point method for general nonlinear programming problems[J]. Applied Methematics and Computation, 1996, 80:209-224.

[5] LIN Z H, ZHU D L, SHENG Z P. Finding a minimal efficient solution of a convex multiobjective program[J]. J Optimization Theory and Applications, 2003, 118(3): 587-600.

[6] 张筑生. 微分拓扑新讲[M]. 北京:北京大学出版社, 2002.

[7] NABER G L. Topological methods in enclidean spaces[J]. London:Cambridge University Press, 1980.

(下转第 260 页)

其中 $Q(s)$ 由 (c_0) 定义,证明过程参看文[7]的定理6,略去.

参考文献

[1] WANG P G, WU Y H. Further results on differential inequality of a class of second order neutral type[J]. Tamkng J Math, 2004,35:43 - 51.

[2] WANG P G, GE W G. Certain class of second order differential inequality of neutral type[J]. Appl Math Letters, 2000,13:45 - 51.

[3] ZHANG L Q, FU X L. A class of second order functional differential inequalities[J]. Ann of Diff Eqns, 1996,12:129 - 133.

[4] LIU X Z, FU X L. Nonlinear differential inequalities with distributed deviating arguments and ap - plications[J]. Nonlin World, 1994,1:409 - 427.

[5] LI H J, LIU W L. Oscillation criteria for second order neutral differential equations[J]. Canad J Math, 1996,48:871 - 886.

[6] BAINOV D D, MISHEV D P. Oscillation Theory for Neutral Equations with Delay[M]. Adam: Hilger, 1991.

[7] YURI V, OGOVCHENKO R. On oscillation of a second order nonlinear delay differential equation[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 2000,43:1 - 29.

[8] CH G. PHILOS. Oscillation theorems for linear differential equations of second order[J]. Arch Math, 1989,53:483 - 492.

Oscillation criteria for nonlinear second order neutral differential equations with distributed delays

WANG Rui - hang[1], REN Hong - shan[1], YU Yuan - hong[2]

(1. School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China; 2. Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: Consider oscillation criterion of nonlinear second order neutral differential equations with distributed delays of the form

$$(r(t)\psi(x(t))[x(t)+c(t)x(\tau(t))]')'+\int_a^b p(t,\xi)f(x[g(t,\xi)])\mathrm{d}\sigma(\xi)=0,t\geq t_0$$

Some sufficient conditions, under which for every solution of this equation is oscillatory, is established by reducing second - dimensional oscillation problems to one - dimensional ones through the Riccati transformation. The obtained results generalize and improve the oscillation theorems in [1] and[7].

Key words: neutral equation; distributed delay; oscillation criterion

(上接第256页)

Homotopy method for multi - objective programming problems

YAO Guang - ming, SONG Wen

(Department of Mathematics, Harbin Normal University, Harbin 150080, China)

Abstract: Consider the combined homotopy interior - point method for multi - objective Programming Problems (MOP). A combined homotopy mapping is constructed. The smooth homotopy path generated by this mapping is proved to be bounded, under some basic assumptions. A K - K - T point and corresponding Lagrange multiplier of MOP are obtained by tracking numerically this path.

Key words: multi - objective program; Homotopy method; K - K - T condition